

Version : Simplified Chinese

2007 年 7 月 25 日

问题 1. 给定实数 a_1, a_2, \dots, a_n . 对每个 i ($1 \leq i \leq n$), 定义:

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\},$$

且令

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) 证明: 对任意实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 有

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) 证明: 存在实数 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 使得 (*) 中的等号成立.

问题 2. 设 A, B, C, D, E 五点中, $ABCD$ 是一个平行四边形, $BCED$ 是一个圆内接四边形. 设 ℓ 是通过 A 的一条直线, ℓ 与线段 DC 交于点 F (F 是线段 DC 的内点), 且 ℓ 与直线 BC 交于点 G . 若 $EF = EG = EC$, 求证: ℓ 是 $\angle DAB$ 的角平分线.

问题 3. 在一次数学竞赛活动中, 有一些参赛选手是朋友. 朋友关系是相互的. 如果一群参赛选手中的任何两人都是朋友, 我们就称这一群选手为一个“团” (特别地, 人数少于 2 的一群也是一个团).

已知在这次竞赛中, 最大的团(人数最多的团) 的人数是一个偶数, 证明: 我们总能把参赛选手分配到两个教室, 使得一个教室中的最大团的人数等于另一个教室中的最大团的人数.

考试时间: 4 小时 30 分

每题 7 分

Version : Simplified Chinese

2007年7月26日

问题 4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA$ 的角平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 R , 与边 BC 的垂直平分线交于点 P , 与边 AC 的垂直平分线交于点 Q . 设 K 与 L 分别是边 BC 和 AC 的中点. 证明: $\triangle RPK$ 和 $\triangle RQL$ 的面积相等.

问题 5. 设 a 与 b 为正整数. 已知 $4ab - 1$ 整除 $(4a^2 - 1)^2$, 证明: $a = b$.

问题 6. 设 n 是一个正整数. 考虑

$$S = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0 \}$$

这样一个三维空间中具有 $(n + 1)^3 - 1$ 个点的集合. 问: 最少要多少个平面, 它们的并集才能包含 S , 但不含 $(0, 0, 0)$.

考试时间: 4 小时 30 分

每题 7 分